

RESOLUTION DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK POUR L'ETUDE DU FILTRAGE DU BRUIT DE PHASE DANS LES SYSTEMES OPTIQUES COHERENTS

I. Roudas, Y. Jaouën and P. Gallion

Département Communications
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
46, rue Barrault, 75634 PARIS CEDEX 13, Tél : (1) 45. 81. 78. 98

1. Introduction

La détection optique cohérente transpose le spectre de modulation du champ optique dans le domaine électrique. Le bruit de phase contenu dans le photocourant à la sortie de la photodiode est converti en bruit d'amplitude et de phase par le filtre passe-bande à la fréquence intermédiaire (FI). La statistique de ces bruits détermine la probabilité d'erreur du système. Une méthode d'évaluation de cette statistique basée sur l'équation de Fokker-Planck est présentée.

2. Formalisme théorique

La fig.1 présente le synoptique d'un récepteur optique cohérent. L'enveloppe complexe du signal à la sortie du préamplificateur $s(t)$ est supposé un échelon unitaire contenant le bruit de phase. Le filtre passe-bande a une réponse impulsionnelle passe-bas équivalente désignée comme $h(t)$. L'enveloppe complexe $z_0(t) = r \exp[j\theta]$ à la sortie de ce filtre s'écrit:

$$z_0(t) = h(t) * s(t) = \int_0^t h(t-t') e^{j\phi(t')} dt' \quad (1)$$

Les termes r et θ représentent le bruit d'amplitude et de phase respectivement à la sortie du filtre et $\phi(t)$ représente le bruit de phase à l'entrée. Ce bruit est modélisé comme $\phi(t) = \int_0^t \dot{\phi}(\tau) d\tau$. L'écart fréquentiel instantané $\dot{\phi}(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance égale à $D = 2\pi\Delta\nu_{IF}$, conduisant à un profil lorentzien de largeur à demi-hauteur $\Delta\nu_{IF}$ à la fréquence intermédiaire.

Le processus stochastique décrit par (1) est un *processus de diffusion* [2]. En utilisant la théorie des processus de diffusion, la densité de probabilité conjointe $p(r, \theta, t)$ peut être calculée par résolution d'une équation aux dérivées partielles appelée *équation de Fokker-Planck* [3]. L'équation de Fokker-Planck correspondante à l'équation (1) dans le cas d'un filtre intégrateur, i.e. un filtre dont la réponse impulsionnelle équivalente en bande de base est rectangulaire, est [4] :

$$-\frac{\partial}{\partial r}(P \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{P}{r} \sin \theta\right) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2)$$

La variable auxiliaire $P = rp(r, \theta, t)$ a été introduite pour bien séparer les opérateurs dans les deux directions r, θ . La condition initiale est $p(r, \theta, 0) = \delta(r, \theta)$.

3. Résolution numérique

Pour résoudre numériquement cette équation, on a divisé l'espace r, θ en un maillage de cellules élémentaires de dimensions $dr \times d\theta$. Ensuite on a calculé la valeur de P aux noeuds du maillage par un processus algorithmique [5]. Cet algorithme est basé sur une méthode des différences finies combinée avec une méthode de séparation des opérateurs [6]. L'équation de Fokker-Planck est divisée en deux sous-équations, chacune contenant seulement les variations dans une des directions r ou θ . La résolution se fait en deux étapes : pendant la première moitié de chaque pas temporel, l'équation en r est résolue. Ensuite, durant la deuxième

moitié du pas temporel, les résultats de cette première sous-équation sont utilisés pour la résolution de la sous-équation en θ .

Les maillages utilisés étaient 2000×500 , 1000×1000 et 500×2000 . Pour le maillage 2000×500 , on a comparé les moments de r , de x et de y donnés par la simulation avec les moments théoriques. Les moments théoriques ont été évalués avec *Mathematica* d'après une formule récursive de [2]. Dans tous les cas, l'erreur relative ne dépassait pas 0.03% pour les moments de r , 0.02% pour les moments de x et le 0.63% pour les moments de y . Les autres valeurs se trouvaient entre ces limites. L'erreur maximale de [4] était 0.02% pour le $E\{r^2\}$ et 0.2% pour le $E\{r^{20}\}$. L'erreur maximale de [4] pour le x et le y n'était pas rapporté.

4. Résultats et discussion

La fig.2 met en évidence l'évolution de la densité de probabilité P en fonction du temps. La probabilité est initialement contenue en un dirac situé à l'origine des axes. Il y a un transfert de probabilité dans la direction de r en fonction du temps. Cet effet est accompagné d'un transfert combiné avec un effet de diffusion dans la direction de θ . A l'instant $t = 6T_b$ les contours correspondants à des valeurs de P comprises entre 0.01 (contours a) et 0.06 (contour k) ont été tracées. On remarque que le maximum de P se situe proche de $r = 6T_b$ environ.

La fig.3 montre les courbes de la densité de probabilité marginale $p_\theta(\theta, t)$ en fonction de θ pour deux différentes valeurs de la largeur spectrale $\Delta\nu_{IF}$ à la fréquence intermédiaire. Les courbes en trait plein ont été calculées par résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck. Les courbes pointillées sont des gaussiennes de variance $0.363DT_b$. On constate qu'il y a un accord parfait sur au moins douze ordres de grandeur. Ce résultat vérifie que la densité de probabilité du bruit de phase après le filtrage FI peut être approximée par une gaussienne pour des valeurs de $\Delta\nu_{IF}T_b$ inférieures à 5 % [7].

Conclusion

Une méthode d'évaluation de la densité de probabilité conjointe du module et de la phase de l'enveloppe complexe du signal à la sortie du filtre FI a été présentée. L'évaluation est effectuée par une équation de diffusion du type Fokker-Planck. Cette technique peut être appliquée aux systèmes homodynes, hétérodynes synchrones et hétérodynes asynchrones pour l'étude du filtrage du bruit de phase à la fréquence intermédiaire.

Références

- [1] G. L. Pierobon and L. Tomba, "Moment characterization of phase noise in coherent optical systems," *J. Lightwave Technol.*, vol. LT-9, no. 8, pp. 364-365, Aug. 1991.
- [2] D. J. Bond, "The statistical properties of phase noise," *Br. Telecom Techn. J.*, Vol. 7, No. 4, pp.12-17, Oct. 1989.
- [3] E. Wong, "Stochastic processes in information and dynamical systems," *McGraw-Hill*, pp. 162-177, 1971.
- [4] I. Garrett et al., "Impact of phase noise in weakly coherent systems: A new and accurate approach," *J. Lightwave Technol.*, vol. LT-8, No. 3, pp. 329-337, Mar. 1990.
- [5] J. B. Waite and D. S. Lettis, "Calculation of the properties of phase noise in coherent optical receivers," *Br. Telecom Techn. J.*, Vol. 7, No. 4, pp.18-26, Oct. 1989.
- [6] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky and W. Vetterling, "Numerical recipes," *Cambridge Univ. Press*, pp. 660-663, 1986.
- [7] G. Jacobsen et al., "Bit error rate floors in coherent optical systems with delay demodulation," *El. Lett.*, vol. 25, No. 21, pp. 1425-1427, Oct. 1989.

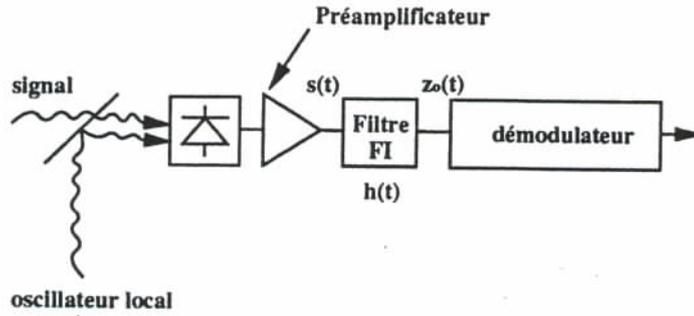


Figure 1: Synoptique d'un récepteur optique cohérent.

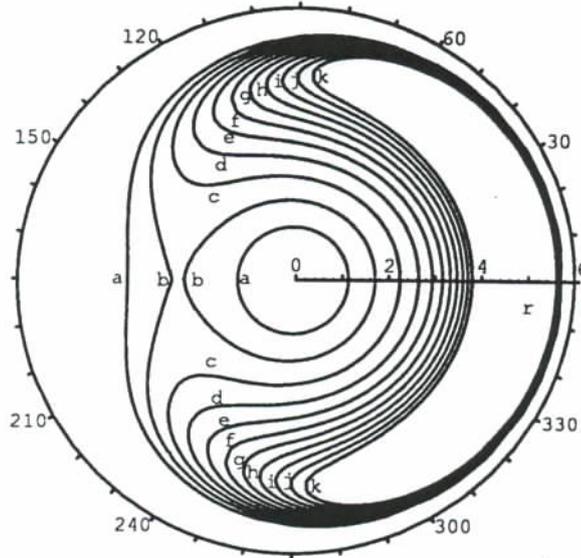


Figure 2: Contours de la densité de probabilité P calculés par résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck à l'instant $t = 6T_b$. Les contours (a) correspondent à $P = 0.01$ et le contour (k) à $P = 0.06$. La valeur de P pour les autres contours (b)-(j) augmente progressivement de 0.01 à 0.06 de l'extérieur vers l'intérieur avec un pas de 0.005. Conditions: $D = 1$, maillage 1000×1000 .

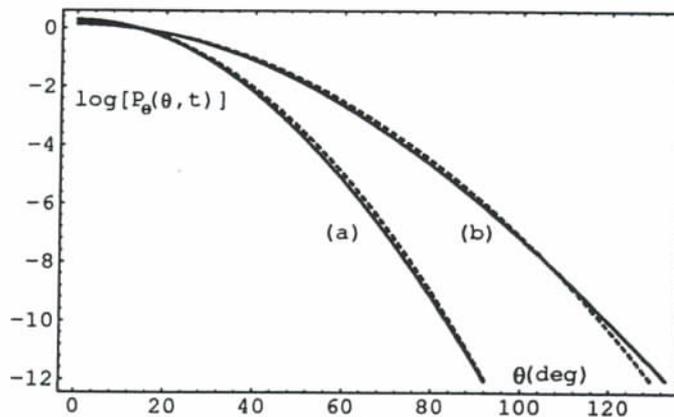


Figure 3: Distributions du bruit de phase après le filtre FI (courbes en trait plein) et leur approximation par des Gaussiennes de variance $0.363DT_b$ (courbes pointillées) pour deux différentes valeurs de la largeur du battement de deux lasers a. $\Delta\nu_{IF}T_b = 0.02$, b. $\Delta\nu_{IF}T_b = 0.04$.